Лес Айдана Қасымқызының

«6D070500 – Математикалық және компьютерлік модельдеу»

мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін

«Гельмгольц потенциалының әдістерімен жерасты геофизикалық өрістерді модельдеу» тақырыбындағы диссертациясына

АҢДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Қазіргі математикалық физикада, әсіресе кванттық механика, акустика және электродинамика есептерінде Гельмгольц теңдеуі негізгі модельдердің бірі болып табылады. Бұл теңдеу стационар толқындық процестерді сипаттайды және оның шешімдерінің қасиеттерін зерттеу теориялық әрі қолданбалы тұрғыдан аса маңызды. Гельмгольц теңдеуінің шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы мәселесі алғаш рет Зоммерфельдтің еңбектерінде қарастырылып, шексіз кеңістіктегі шешімдерді сипаттау үшін сәулелену (радиациялық) шарт енгізілген. Алайда, классикалық Дирихле шарттары жағдайында шешімнің жалғыздығы бұзылады, бұл қосымша шарттарды енгізуді талап етеді. Осы тұрғыда Зоммерфельдтің сәулелену шартын шенелген облыстағы эквивалентті шекаралық шартпен алмастыру мәселесі маңызды ғылыми проблема болып табылады. Бұл мәселенің шешімі сандық модельдеу мен есептеу әдістерін тиімді қолдануға мүмкіндік береді.

Зерттеу жұмысының мақсаты мен міндеттері: – Гельмгольц теңдеуінің іргелі шешімдерін $R^n, n > 3$ кеңістігінде зерттеу;
– Зоммерфельдтің сәулелену шарттарын шенелген облыстағы интегралдық шекаралық шарттармен алмастыру;
– $k^2 = \lambda_m$ жағдайында Гельмгольц потенциалының қасиеттерін дәлелдеу;
– Көпөлшемді кеңістікте Зоммерфельд есебінің коррект қойылымын беру;
– Шексіз цилиндрлік облыстарда мөлдір шекаралық шарттарды анықтау;
– Эллиптикалық потенциалдардың тығыздығын анықтаудың шарттарын табу;
– Екіөлшемді есептер үшін сандық алгоритмдер құру және жүзеге асыру.
Зерттеудің ғылыми жаңалығы: – $R^n, n \geq 3$ кеңістігінде Гельмгольц теңдеуінің іргелі шешімі алынған және nnn жұп болған жағдайда оның асимптотикалық мінез-құлқы сипатталған;
– Кез келген k^2 үшін Гельмгольц потенциалының дифференциалдық теңдеумен және арнайы интегралдық шекаралық шартпен эквиваленттілігі дәлелденген;
– Зоммерфельд есебі көпөлшемді кеңістікте жалпыланып, оның Гельмгольц потенциалына эквиваленттілігі көрсетілген;
– Шексіз жартылай цилиндрлік облыстар үшін мөлдір шекаралық шарттардың аналитикалық түрі және олардың асимптотикасы табылған;

– Көп айнымалы эллиптикалық потенциалдардың тығыздығын анықтаудың қажетті және жеткілікті шарттары алынған;
– Екі өлшемді Гельмгольц теңдеуі үшін потенциалдық шекаралық есептің тиімді сандық әдісі ұсынылған және жүзеге асырылған.

Зерттеу әдістері. Жұмыста дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясы, функционалдық талдау әдістері, интегралдық операторлар теориясы, потенциалдар теориясы, жалпыланған функциялар теориясы және арнайы функциялар теориясы қолданылды. Сонымен қатар, шекаралық интегралдық теңдеулер әдісі және сандық талдау тәсілдері пайдаланылды.

Зерттеудің теориялық маңыздылығы. Алынған нәтижелер көпөлшемді кеңістіктегі эллиптикалық типтегі дифференциалдық теңдеулер теориясын дамытуға елеулі үлес қосады. Гельмгольц теңдеуі үшін жаңа эквивалентті қойылымдар теориялық негізді тереңдетіп, болашақ зерттеулерге бағыт береді. Жұмыс негізінен теориялық сипатқа ие. Алынған нәтижелер дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің $R^n, n > 3$ кеңістігіндегі теорияларды әрі қарай дамыту үшін қолданылады. Сонымен қатар жұмыстың нәтижелері жаратылыстану, әсіресе геофизика ғылымдарының ұңғымадағы әртүрлі мәселелерді шешуге қолдануға болады.

Зерттеудің тәжірибелік маңыздылығы. Зерттеу нәтижелері геофизика, акустика, электромагниттік толқындардың таралуы сияқты қолданбалы салаларда пайдаланылуы мүмкін. Атап айтқанда, ұңғымалардағы толқындық өрістерді модельдеу, жер қойнауын зерттеу және инженерлік есептерді шешуде қолдану мүмкіндігі бар.

Жұмыстың апprобациясы. Зерттеудің негізгі нәтижелері келесі конференцияларда ұсынылды:

1. Кальменов Т.Ш., Лес А.К. Спектральное разложение потенциала Гельмгольца. Традиционная международная научная апрельская конференция, посвященная дню работников науки, 3-5 сәуір, 2019 ж.
2. Кальменов Т.Ш., Лес А.К. Определение плотности эллиптического потенциала. Международной конференции. Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры. (EMJ-2019).
3. Кальменов Т.Ш.,Лес А.К. Задача Зоммерфельда и обратная задача для уравнения Гельмгольца. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования , (Алматы – 2020ж).
4. Искакова У.,Лес А.К. Об одной переопределенной задаче для уравнения Лаврентьева - Бицадзе. Международной научной конференции посвященной 90 летию со дня рождения академика Т.Д.Джураева (24–

26 октября 2024 года, Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. Изд–во "Маърифат". 2024.166 с

5. Кальменов Т.Ш., Лес А.К. Задача Зоммерфельда в бесконечном полуцилиндре. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки и 80-летия Института математики и математического моделирования, 1–4 сәуір 2025 ж.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 3 ғылыми еңбек жарияланған. Оның ішінде 2 мақала Web of Science және Scopus халықаралық деректер қорларына енгізілген импакт-факторлы журналдарда,

1. T.S. Kalmenov , S.I. Kabanikhin and Aidana Les. The Sommerfeld problem and inverse problem for the Helmholtz equation.Journal Inverse Ill-Posed Probl, 2021; 29(1): 49–64. h-index=2. Web of Science Impact factor=1.1, DOI:10.1515/jiip-2020-0033 (Q1)
2. T.S. Kalmenov, A.K. Les and U. A. Iskakova. Determination of density of elliptic potential.Eurasian mathematical journal, ISSN 2077-9879, Vol. 12, N. 4 (2021), (Q3) p.43-52 . DOI: 10.32523/2077-9879-2021-12-4-43-52

ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған тізімге енгізілген мақалалар жарияланды:

T.S. Kalmenov and A.K. Les. Boundary condition of volume potential and its application to inverse problem.Kazakh Mathematical Journal, ISSN 2413–6468 19:4 (2019) p.71–78

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация қазақ тілінде жазылып, қолжазба түрінде ұсынылған. Ол титул беті, мазмұны, кіріспе, төрт негізгі бөлім, қорытынды және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың жалпы көлемі – 96 бет, оның ішінде 29 сурет және 1 қосымша бар.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Потенциалдың физикалық мәнін бүкіл әлемдік тартылыс заңы ретінде Иссак Ньютон зерттеді. Электромагниттік өрістерді осы потенциалмен зерттеген Гаусс, оны әрі қарай дамытқан ғалымдар Лагранж, Лаплас, Грин, Соболев т.б. еді. Ньютон потенциалының көмегімен математикалық физиканың есептері - Дирихле есебі, Нейман сияқты тағыда басқа есептерді шешуге болады. Ньютон потенциалы математикада жаңа бағдарлама – жалпы функциялар теориясын жасауға, енгізу теоремаларын жасауға көп ықпалын тигізді. Қазіргі кезде теориялық және қолданбалы маңызы бар екінші ретті эллиптикалық теңдеулердің шеттік есептерін шығаруға көлемдік потенциалдарды көп қолданады.

1-бөлімде Математкалық физикада толқын теңдеуін

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u} - a^2\Delta_x\tilde{u} = \tilde{f}(x,t) \qquad (1)$$

зерттеуде оның іргелі шешімі қолданылады. Мұндағы $\Delta_x \tilde{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2}$ Лаплас операторы. (1) теңдеуіне $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + u_0(x)\delta^{(1)}(t) + u_1(x)\delta(t)$ болса Коши есебінің жалпы шешімі үйірткі түрінде жазылады

$$\tilde{u}(x,t) = \left(\varepsilon * \tilde{f}\right)(x,t) \tag{2}$$

Бұл жердегі функциялар $f \in C^2(t \geq 0),\ u_0 \in C^3(R^3),\ u_1 \in C^2(R^3)$. (2)-шешімі Кирхгоф формуласымен беріледі

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x,at)} \frac{f\left(\xi, t - \left|\frac{x-\xi}{a}\right|\right)}{|x-\xi|} d\xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x,at)} \tilde{u}_1(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S(x,at)} \tilde{u}_0(\xi) dS\right] \tag{3}$$

(3) формуласынан $\tilde{u}(x,t)$ ның $|x| \to \infty$ кезіндегі қасиетін зеттеу үлкен қиындық туғызады. Сондықтан қолданыста солитондық (дербес толқын) шешімдерінің қасиеттерін зерттейді. Егерде $\tilde{u}(x,t) = e^{ikt}u(x),\ \tilde{f}(x,t) = e^{ikt}f(x)$ алмастырсақ, онда (1) теңдеуі келесі Гельмгольц теңдеуіне келтіріледі

$$Lu = -\Delta_x u - k^2 u = f(x),\ \ x \in R^3 \tag{4}$$

Мұнда k кез келген нақты сан, егер $k = 0$, онда (5) теңдеу Лаплас теңдеуі болады. Көп өлшемді гельмгольц теңдеуінің іргелі шешімін түсу әдісі және макдональд функциясы арқылы алынған Гельмгольц теңдеуінің іргелі шешімі құрастырылады.

2- бөлімде кез-келген k саны үшін Гельмгольц потенциалының шекаралық есепке эквиваленттілігі дәлелденеді.

3- бөлімде R^n де тақ өлшемді (n = 2s + 3) және жұп өлшемді (n = 2s), кеңістіктегі Зоммерфельд есебінің шешімінің жалғыздығы және ақырлы тұғыры бар сәулелену жағдайында Зоммерфельд сәулелену шартының ақырлы облыстағы потенциалды шекаралық шартқа эквиваленттілігін дәлелдеу. I - Зоммерфельд есебі. R^3 кеңістігінде Гельмгольц теңдеуінің

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x),\ \ x \in R^3$$

шексіздікте мына шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу

$$\lim_{|x|\to\infty} |u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d}, \quad \lim_{|x|\to\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} - iku\right|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^2}$$

II - Зоммерфельд есебі. R^3 кеңістігінде Гельмгольц теңдеуінің

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x), \;\; x \in R^3$$

шексіздікте мына шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу

$$\lim_{|x|\to\infty} |u(x)|_{|x|=d} \le \frac{M}{d}, \quad \lim_{|x|\to\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} + iku\right|_{|x|=d} \le \frac{M}{d^2} \qquad (3)$$

Зоммерфельдтің жұмысында осы есепте егер $suppf \subset \Omega$, Ω – шенелген обылс, онда I - Зоммерфельд есебі және II - Зоммерфельд есебінің жалғыз шешімі бар екенін көрсетті. Зоммерфельдтің нәтижесінен мынадай проблема туады: I - Зоммерфельд есебінің шартын Ω – шенелген обылсында қандай шартпен алмастыруға болады, яғни Зоммерфельд шағылысу шартын қандай жолмен шенелген Ω облыстағы шекаралық шартқа алмастыруға болады. Егерде осындай шарт табылса Зоммерфельд есебінің сандық шешімін оңай табуға болады. Ол шарт Гельмгольц потенциалдық шекаралық шарт екені осы тарауда дәлелденеді

4- бөлімде Төртінші бөлімдегі негізгі мақсат шенелген облыстағы Гельмгольц есебі мен Гельмгольц потенциалының сандық эксперименттерін екі өлшемді жағдай үшін келтіру, яғни, біріншіден, шекаралық есеп және оның тұйық түрде берілген шешімінің сәйкестігін көрсету, екіншіден, Гельмгольц потенциалына қойылған кері есептің тығыздығының жалғыздығы шарты екенін сандық әдіс арқылы көрсету. Алдымен есептердің бір өлшемді аналогтары үшін қарастыратын боламыз. Локальді емес шекаралық есептерді сандық әдістермен шешу барысында жуықталған шешімнің қателігі, локальді есептермен салыстырғанда, айтарлықтай жоғары болады. Сондықтан локальды емес есептер үшін нақты шешімді пайдалану тиімді әрі дәл нәтиже береді. Ұсынылып отырған әдіс арқылы шешімді нақты түрде өрнектеуге мүмкін болғандықтан, локальді емес есептерді сандық жүзеге асыру кезінде туындайтын жуықтау қателіктері толықтай жойылады.

Осыған байланысты, берілген әдіс локальді емес шекаралық есептерді шешуде жоғары дәлдік пен тұрақтылықты қамтамасыз ететін тиімді құрал болып табылады. Гельмгольц теңдеуі үшін потенциалдық шекаралық шарты бар есептің шешіміне сандық нәтижелер алынады.

Қорытынды. Гельмгольц теңдеуінің іргелі шешімі жоғары өлшемді кеңістіктерде Макдональд функциялары арқылы құрылды. Кез келген k үшін Гельмгольц потенциалының шекаралық есеппен эквиваленттілігі дәлелденді. Көпөлшемді кеңістікте Зоммерфельд есебінің шешімінің жалғыздығы және оның сәулелену шартының шенелген облыстағы потенциалдық шартқа эквиваленттілігі негізделді. Цилиндрлік облыста есептің шешімі табылып, эллиптикалық потенциалдың тығыздығы анықталды. Сонымен қатар, екі өлшемді Гельмгольц теңдеуі үшін сандық нәтижелер алынды.